

Formelsammlung

Formelsammlung

Formelsammlung

Formel

Technische Akustik

Formelsammlung

2016

Jan Borgers

ammlung

Formelsammlung

Formelsammlung

Formelsammlung

Formelsammlung

Formelsammlung

Formelsammlung

Formelsammlung

1. Grundlagen	
• Bezugsgrößen für Schalldruck; Schallleistung	Seite 2
• Filterkurven A-; B-; C-Gewichtung	Seite 3
• Terz-; Oktavfilter und deren Bandbreiten	Seite 5
• Rauschsignale / Impulse	Seite 7
2. Luftströmungswiderstand	
• Definition	Seite 10
• Berechnung aus Faser- und Vlieseigenschaften	Seite 11
• Luftströmungswiderstand perforierter, gelochter Folien und Platte	Seite 14
3. Luftschallabsorption /Luftschalldämpfung	
• Schallkennimpedanz (Impedanzrohr ISO 10 534)	Seite 16
• „Normierte“ Luftschallabsorption	Seite 20
• Hallraum (ISO 354)	Seite 22
• Bewertung des Absorptionsgrades nach ISO 11654	Seite 28
4. Luftschalldämmung /Luftschallisolation	
• Schalldämmmass R basierend auf Schalleistung	Seite 31
• Apamat	Seite 31
• Decken-, Fensterprüfstand /LS-box	Seite 31
• Bewertetes Schalldämm-Maß	Seite 34
• Resonanz / Verlustfaktor / Speichermodule	Seite 36
5. Intensität / Schalleistung für die „Weiße Industrie“	Seite 46
6. Kraftfahrzeugakustik	
• Schalldruckpegel und Ordnungsanalyse	Seite 48
• Artikulationsindex	Seite 49
• Außengeräusch Vorbeifahrt ISO 362	Seite 52
Bauteil- und Fahrzeuganalyse; Benchmark mittels Geräuschsimulation	
• Mittlere äquivalente Luftschallabsorption einer KFZ-Karosserie	Seite 53
• Lautsprecher-simulation Reifen-, Motor-, Abgasmündungsgeräusch	Seite 55
• Karosserie Einfügedämmung	Seite 58
• Nachhallzeit im Fahrzeug	Seite 59

Resonanz / Verlustfaktor / Speichermodul

Die Messung erfolgt nach

- nicht mehr gültiger DIN 53426 (Mercedes Benz)
- TL 1933613 (BMW)

Beide beschreiben prinzipiell den gleichen Messaufbau und unterscheiden sich nur in unterschiedlicher Probennahme und im Messzyklus.

Gemessen wird die Übertragungsfunktion einer Schaumschicht zwischen zwei Massen. Anhand der Resonanzfrequenz und der Resonanzbandbreite lassen sich bei bekannter Deckmasse und bekannten Probandaten

- der Verlustfaktor
- der Speichermodul des Schaumsystems bestimmen.

Verlustfaktor:

$$\eta = \frac{\Delta f}{f_0}$$

mit $\Delta f = f_o - f_u$ als Resonanzbandbreite oberhalb und unterhalb der Resonanzfrequenz f_0 bei -3 dB von der Maximalamplitude bei der Resonanzfrequenz oder bei Normierung der Maximalamplitude auf den Wert „1“ bei $\frac{1}{\sqrt{2}}$ der Maximalamplitude „1“
und f_0 als Resonanzfrequenz

Speichermodul E' [Pa]:

$$E' = m * \omega_0^2 * \frac{h}{A}$$

mit $\omega_0 = 2 * \pi * f_0$ als Kreisfrequenz bei Resonanzfrequenz f_0 [Hz]

m als Probenmasse + Deckmasse [kg]

h als Probendicke [m]

A als Probenfläche [m²]

Beispiel:

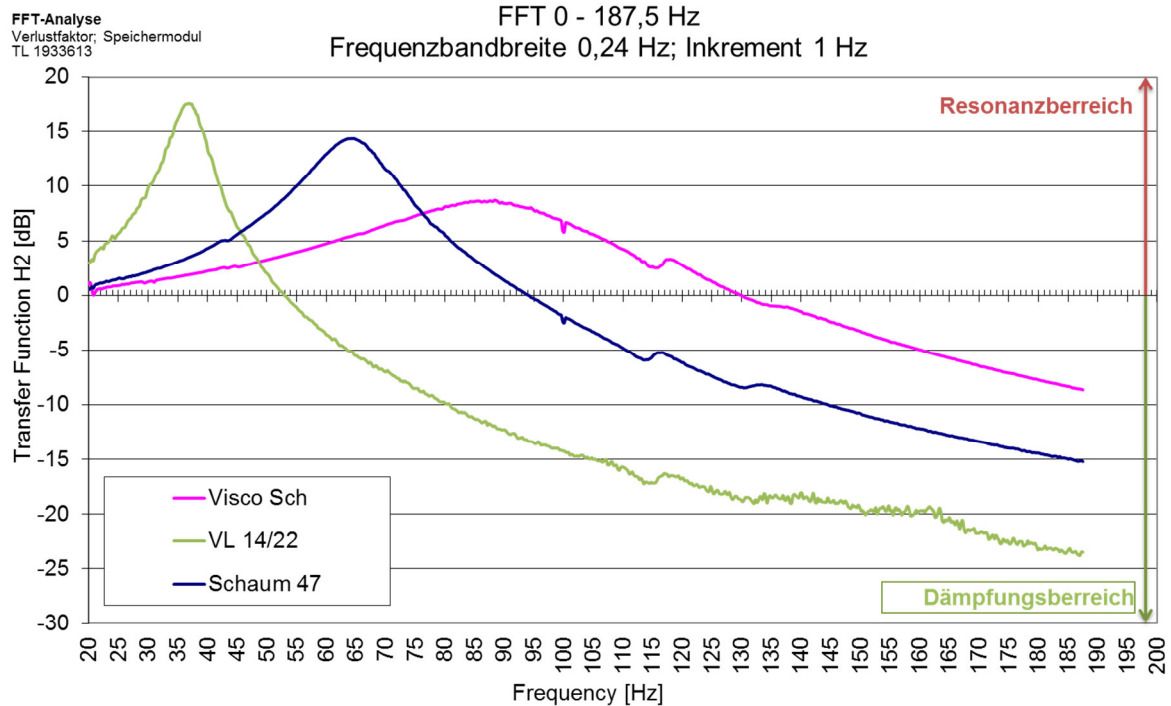
	Dicke h [m]	Masse m [kg]	Fläche A [m ²]	Deckschicht [kg]	f_0	Δf	Verlustfaktor η	Speichermodul E' [Pa]
Visco Sch	0,0189	0,00315	0,0025	0,05046	87,3	37,7	0,4318	121.943
VI 14/22	0,022	0,0043	0,0025	0,05046	36,75	8,25	0,2245	25.693
Sch 47	0,03	0,0058	0,0025	0,05046	64,25	16,75	0,2607	110.024

Für die Umrechnung der NORSONIC-Daten

$$L_P = 10 * \lg\left(\frac{p(t)}{p_0}\right)^2 = 20 * \lg\left(\frac{p(t)}{p_0}\right) \text{ mit } p(t) \text{ als Units aus dem Analysator und } p_0 = 20 \mu Pa$$

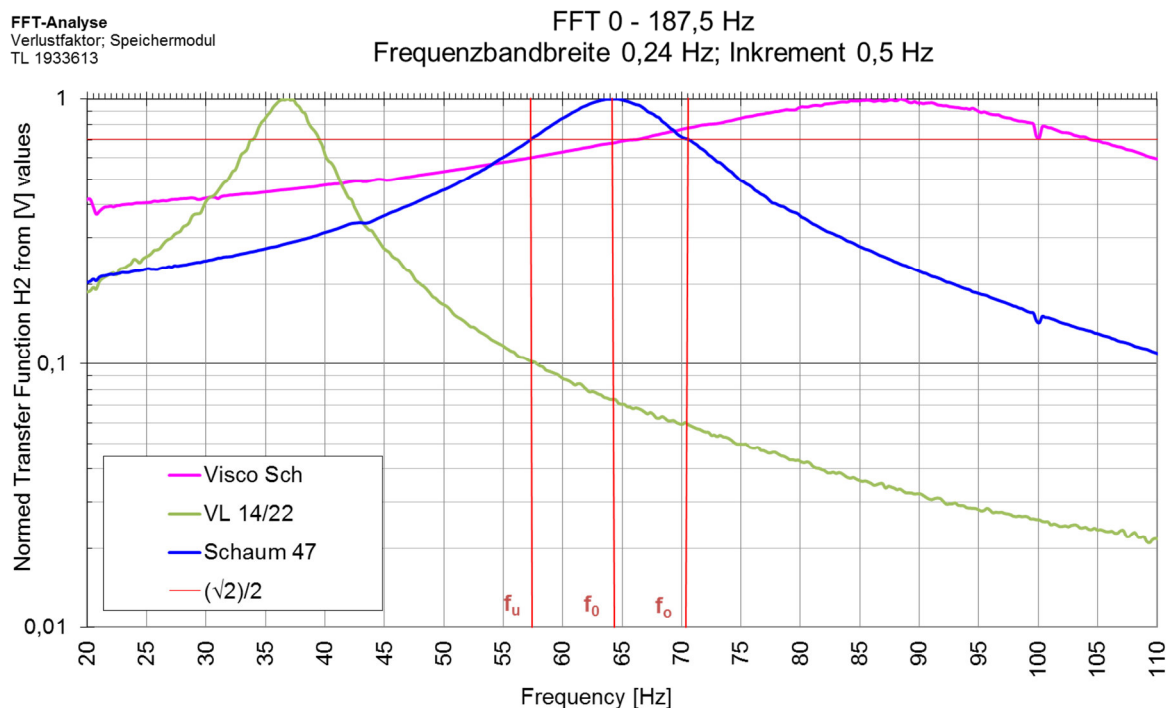
$$p(t) = p_0 * 10^{\left(\frac{L_P}{20}\right)} \text{ mit } L_P \text{ als dB-Wert aus dem Analysator und } p_0 = 20 \mu Pa$$

Transferfunktion der oben beschriebenen Materialien mit den dazugehörigen Berechnungen von Verlustfaktor und Speichermodul



Die Transferfunktionen aus „dB“-Werten dürfen nicht normiert werden.

Auf „1“ normierte Transferfunktionen aus „Volt“-Werten des Messgerätes der oben gemessenen Materialien.



Herleitung der verwendeten „Mathematik“

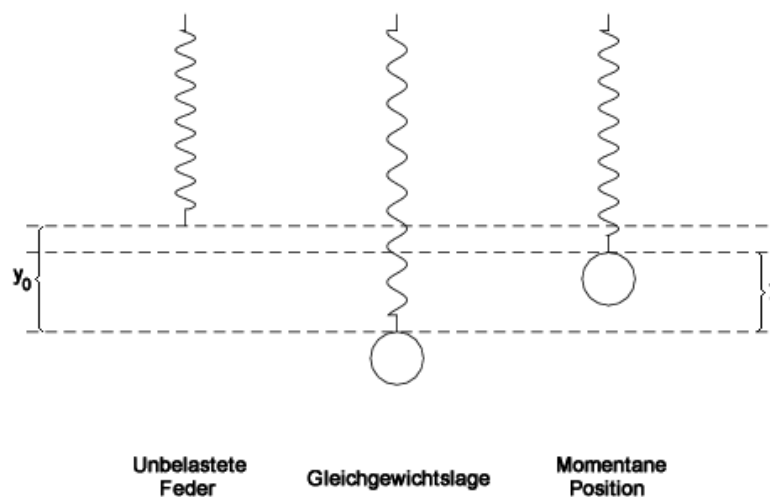
Physik eines gedämpften Federpendels

Energieerhaltungssatz

Ein Federpendel besteht in seiner einfachsten Form aus einer Schraubenfeder (mit Federkonstante D) und einem an der Feder aufgehängten Pendelkörper (Massenstück der Masse m). Lenkt man den Pendelkörper gegenüber seiner Gleichgewichtslage nach oben oder unten aus, so beginnt der Pendelkörper auf- und abzuschwingen.

Diese Pendelbewegung soll hier – stark vereinfacht – analysiert werden. Reibungskräfte (innere Reibung der Feder und Luftwiderstand) werden vernachlässigt. Für die Feder wird angenommen, dass das hooke'sche Gesetz (Proportionalität zwischen Kraft und Dehnung der Feder) exakt gilt. Die Feder wird als masselos betrachtet; daher spielen Kräfte, durch die Teile der Feder beschleunigt werden, in der Rechnung keine Rolle. Torsionsschwingungen, wie sie bei einem realen Federpendel auftreten, sollen nicht berücksichtigt werden.

Zur Beschreibung des momentanen Zustands zur Zeit t wird die Elongation y (Auslenkung gegenüber der Gleichgewichtslage) als Koordinate verwendet. y kann sowohl positiv (nämlich oberhalb der Gleichgewichtslage) als auch negativ sein (unterhalb der Gleichgewichtslage). Als Anfangsbedingung wird angenommen, dass zur Zeit $t = 0$ der Pendelkörper um die Strecke A angehoben ist und losgelassen wird.



Im linken Teil der Skizze ist die unbelastete Feder abgebildet. In der Mitte ist das komplette Federpendel in seiner Gleichgewichtslage zu sehen; hier ist die Feder durch das Gewicht des Pendelkörpers um eine Strecke y_0 gedehnt. Rechts ist ein momentaner Zustand des Federpendels dargestellt, und zwar unter den Voraussetzungen $y > 0$ und $|y| < y_0$. Die späteren Überlegungen beziehen sich zunächst auf diesen Fall, sind aber auch für andere Werte von y richtig.

Dehnung (Stauchung) der Feder in der Gleichgewichtslage

Die Dehnung der Feder in der Gleichgewichtslage, hervorgerufen durch die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ des Pendelkörpers, ergibt sich aus dem hooke'schen Gesetz:

$$y_0 = \frac{m \cdot g}{D}$$

y_0	[m]	Dehnung der Feder in der Gleichgewichtslage
m	[kg]	Masse des Pendelkörpers
g	[m/s ²]	Fallbeschleunigung (Ortsfaktor)
D	[N/m]	Federkonstante

Ansatz: Zusammenhang zwischen Rückstellkraft und Elongation

Auf den Pendelkörper wirken zwei Kräfte, nämlich die Federkraft und die Gewichtskraft. Die Federkraft berechnet man wieder mit dem hooke'schen Gesetz als Produkt der Federkonstante D und der Dehnung $y_0 - y$. Mit Dehnung ist hier die Längenänderung gegenüber der unbelasteten Feder gemeint. Die Federkraft ist in der gezeichneten Situation nach oben gerichtet und erhält deswegen ein positives Vorzeichen. Die Gewichtskraft $m \cdot g$ wird dagegen mit einem Minuszeichen versehen, da sie nach unten gerichtet ist.

$$F = D \cdot (y_0 - y) - m \cdot g = D \cdot \left(\frac{m \cdot g}{D} - y \right) - m \cdot g = m \cdot g - D \cdot y - m \cdot g = -D \cdot y$$

F	[N]	Rückstellkraft
D	[N/m]	Federkonstante
y	[m]	Elongation

Die Gleichung besagt, dass die auf den Pendelkörper wirkende Kraft (Rückstellkraft) proportional und entgegengesetzt zur Elongation ist. In einem solchen Fall hat man es mit einer *ungedämpften harmonischen Schwingung* zu tun, die durch eine Sinus- oder Cosinusfunktion beschrieben werden kann. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die Gewichtskraft in der Formel nicht vorkommt.

Kreisfrequenz und Schwingungsdauer

Eine harmonische Schwingung ist gekennzeichnet durch die so genannte Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

ω	[1/s]	Kreisfrequenz ($2 \cdot \pi \cdot f$)
D	[N/m]	Federkonstante
m	[kg]	Masse des Pendelkörpers

beziehungsweise die Schwingungsdauer (Periodendauer)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

T	[s]	Schwingungsdauer (Periodendauer)
π		Kreiszahl (3,14159...)
D	[N/m]	Federkonstante
m	[kg]	Masse des Pendelkörpers

Elongation (Weg)

Die Elongation y kann nun folgendermaßen als Funktion der Zeit t ausgedrückt werden:

$$y = A * \cos(\omega t) = A * \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} * t\right)$$

Y	[m]	Elongation (Auslenkung gegenüber der Gleichgewichtslage)
A	[m]	Amplitude (maximaler Absolutbetrag der Elongation)
ω	[1/s]	Kreisfrequenz ($2 * \pi * f$)
t	[s]	Zeit
D	[N/m]	Federkonstante
m	[kg]	Masse des Pendelkörpers

Dass hier eine Cosinus- und keine Sinusfunktion steht, liegt an der oben festgelegten Anfangsbedingung. Setzt man nämlich $t = 0$ ein, so erhält man – wie gewünscht – die anfängliche Auslenkung $y = A$. Eine Begründung der Formel soll erst später durch Nachrechnen erfolgen, und zwar im Abschnitt über die Kraft.

Geschwindigkeit

v sei die (vorzeichenbehaftete) Geschwindigkeitskomponente in senkrechter Richtung. Bei Bewegung nach oben ist v positiv, bei Bewegung nach unten negativ. v wird berechnet durch Differenzieren (Ableiten) von y nach t , wobei die Kettenregel zu berücksichtigen ist ("Nachdifferenzieren"!).

$$v = -A * \sin(\omega t) = -A * \sqrt{\frac{D}{m}} * \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} * t\right)$$

v	[m/s]	Geschwindigkeit
A	[m]	Amplitude
ω	[1/s]	Kreisfrequenz ($2 * \pi * f$)
t	[s]	Zeit
D	[N/m]	Federkonstante
m	[kg]	Masse des Pendelkörpers

Erneutes Einsetzen von $t = 0$ ergibt $v = 0$ und bestätigt so, dass die Anfangsbedingung auch hinsichtlich der Geschwindigkeit erfüllt ist: Der Pendelkörper ist beim Loslassen unbewegt.

Beschleunigung

Differenziert man ein zweites Mal nach t , so erhält man die Beschleunigung a . Auch diese Größe wird hier – entsprechend wie die Geschwindigkeit – mit Vorzeichen verwendet.

$$a = -A * \omega^2 * \cos(\omega t) = -A * \frac{D}{m} * \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} * t\right)$$

a	[m/s ²]	Beschleunigung
A	[m]	Amplitude
ω	[1/s]	Kreisfrequenz ($2 * \pi * f$)
t	[s]	Zeit
D	[N/m]	Federkonstante
m	[kg]	Masse des Pendelkörpers

Rückstellkraft

Die Rückstellkraft auf den Pendelkörper ergibt sich nach dem newton'schen Kraftgesetz (2. Newton-Axiom) als Produkt von Masse und Beschleunigung.

$$F = -m * A * \cos(\omega t) = -A * \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} * t\right)$$

F	[N]	Rückstellkraft
m	[kg]	Masse des Pendelkörpers
A	[m]	Amplitude
ω	[1/s]	Kreisfrequenz ($2 * \pi * f$)
t	[s]	Zeit
D	[N/m]	Federkonstante

Vergleicht man die Rechenausdrücke für die Kraft F und die Elongation y , so stellt man fest, dass sie sich nur durch ein Minuszeichen und den Faktor D unterscheiden. Es gilt also – in Übereinstimmung mit unserem Ansatz:

$$F = -D * y$$

F	[N]	Rückstellkraft
D	[N/m]	Federkonstante
Y	[m]	Elongation

Damit ist die bisher fehlende Begründung der Elongationsformel nachgeholt.

Kinetische Energie

Die kinetische Energie (Bewegungsenergie) des Pendelkörpers ergibt sich durch Einsetzen in die bekannte Formel (halbe Masse mal Quadrat der Geschwindigkeit).

$$E_k = \frac{m}{2} * v^2 = \frac{m}{2} * (-A * \omega * \sin(\omega t))^2 = \frac{m}{2} * A^2 * \omega^2 * \sin^2(\omega t)$$

$$= \frac{D}{2} * A^2 * \sin^2\left(\sqrt{\frac{D}{m}} * t\right)$$

E_k	[Nm]	kinetische Energie (Bewegungsenergie)
m	[kg]	Masse des Pendelkörpers
A	[m]	Amplitude
ω	[1/s]	Kreisfrequenz ($2 * \pi * f$)
t	[s]	Zeit
D	[N/m]	Federkonstante

Potentielle Energie

Hinsichtlich der potentiellen Energie (Lageenergie) eines Federpendels herrscht oft Verwirrung. Das liegt daran, dass hier zwei verschiedene Arten potentieller Energie beteiligt sind, nämlich Federenergie und Höhenenergie. Außerdem ist zu beachten, dass die potentielle Energie erst nach Festlegung eines Bezugspunktes, an dem die potentielle Energie den Wert 0 hat, eindeutig bestimmt ist. Hier wird naheliegendermaßen vereinbart, dass die beiden genannten Arten potentieller Energie in der Gleichgewichtslage gleich 0 sein sollen.

Für die Federenergie erhält man:

$$E_{p1} = \frac{D}{2} * (y_0 - y)^2 - \frac{D}{2} * y_0^2 = \frac{D}{2} * (y_0^2 - 2y_0y + y^2 - y_0^2) = -Dy_0y + \frac{D}{2}y^2$$

Der Minuend dieser Differenz ergibt sich aus der bekannten Formel für die Federenergie (halbe Federkonstante mal Quadrat der Dehnung). $y_0 - y$ ist hier wieder die Dehnung im Vergleich zur unbelasteten Feder. Der Subtrahend ist notwendig, damit für $y = 0$ der Wert 0 herauskommt.

Einfacher ist der Rechenausdruck für die Höhenenergie:

$$E_{p2} = m * g * y$$

Zur Berechnung der gesamten potentiellen Energie braucht man nur noch E_{p1} und E_{p2} zu addieren, und zwar unter Berücksichtigung der Formel für y_0 .

$$E_p = -Dy_0y + \frac{D}{2}y^2 + m * g * y = -D * \frac{m * g}{D} * y + \frac{D}{2}y^2 + m * g * y = \frac{D}{2}y^2$$

Hier fällt auf, dass – ähnlich wie beim Zusammenhang zwischen Rückstellkraft und Elongation – die Höhenenergie nicht mehr vorkommt. Betrachtet man y als Dehnung (im Vergleich zur Federlänge in der Gleichgewichtslage) und nicht wie bisher $y_0 - y$ (Dehnung im Vergleich zur Länge der unbelasteten Feder), so kann man die gesamte potentielle Energie als Federenergie auffassen.

Die gesamte potentielle Energie lässt sich entsprechend wie die kinetische Energie ausdrücken:

$$E_p = \frac{D}{2} * A^2 * \cos^2\left(\sqrt{\frac{D}{m}} * t\right) = \frac{m}{2} * A^2 * \omega^2 * \cos^2(\omega t)$$

E_p	[Nm]	potentielle Energie (Bewegungsenergie)
m	[kg]	Masse des Pendelkörpers
A	[m]	Amplitude
ω	[1/s]	Kreisfrequenz ($2 * \pi * f$)
t	[s]	Zeit
D	[N/m]	Federkonstante

Gesamtenergie

Durch Addition von kinetischer und potentieller Energie erhält man die Gesamtenergie. Die Vereinfachung des entsprechenden Terms erfolgt durch Ausklammern der gemeinsamen Faktoren und Anwendung des "trigonometrischen Pythagoras".

Mit

$$E = E_k + E_p$$

und

$$\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$$

folgt für die gesamte Energie

$$E = \frac{m}{2} A^2 * \omega^2$$

Es stellt sich heraus, dass die Gesamtenergie nicht von der Zeit t abhängt. Der Energieerhaltungssatz ist also erfüllt.

$$E = \frac{m}{2} A^2 * \omega^2 = \frac{D}{2} * A^2 \Rightarrow m * \omega^2 = D \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

E	[Nm]	gesamte Energie (Bewegungsenergie)
m	[kg]	Masse des Pendelkörpers
A	[m]	Amplitude
ω	[1/s]	Kreisfrequenz ($2\pi f$)
D	[N/m]	Federkonstante

q.e.d.

Aus Dubbel Auflage 20 2001; ISBN 3-540-67777-1; Festigkeitslehre: Abschnitt 2.2.1 Zug-Druckstäbe Seite G52

$$D = E * \frac{A}{l}$$

mit

D	[N/m]	Federkonstante
E	[N/mm ²]	Elastizitätsmodul (Speichermodul)
A	[m ²]	Stabquerschnitt (Probenfläche)
l	[m]	Stablänge (Probendicke)

und

$$m * \omega^2 = D$$

mit

m	[kg]	Masse des Pendelkörpers
ω	[1/s]	Kreisfrequenz ($2\pi f$)
D	[N/m]	Federkonstante

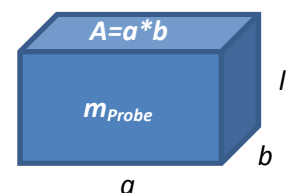
folgt nach Einsetzen von „ D “ in die Festigkeitsgleichung

$$m * \omega^2 = E * \frac{A}{l}$$

nach Umformung

$$E = m * \omega^2 * \frac{l}{A}$$

E	[N/mm ²]	Speichermodul
m	[kg]	Masse der Deckschicht + Probenmasse
ω_0	[1/s]	Resonanzfrequenz ($2\pi f_0$)
A	[m ²]	Probenfläche
l	[m]	Probendicke



für den Schwingversuch nach BMW-TL 193363

Der Verlustfaktor

$$\eta = \frac{\omega_o - \omega_u}{\omega_o} = \frac{f_o - f_u}{f_o}$$

wird unter Mathematik und „[3_tsl_one-mass_damped.pdf](#)“ ausführlich beschrieben.
Gefunden bei HAW-Hamburg (Hochschule für Angewandte Wissenschaften), TSL Ihlenburg
Thema „[Freie gedämpfte Schwingungen](#)“ Viskose Dämpfung

Hier nur eine kurze Herleitung

Viskose Dämpfung

Beobachtung: Widerstandskraft in viskosen Fluiden ist proportional zur Geschwindigkeit.



Folgerung: Bei Parallelschaltung von Feder und Dämpfer gilt

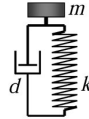
$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Abklingkonstante

$$\delta = \frac{d}{2m}$$



HAW/M+P, Ihlenburg, TSL Freie Schwingungen 2 5

Viskose Dämpfung

Kritische Dämpfung

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \varphi_0)$$

Die Lösung stellt eine harmonische Schwingung dar falls die gedämpfte Eigenfrequenz $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$ reellwertig ist.



Diskussion Dämpfungsgrad:

$0 \leq D < 1$: ω_d reell	Unterkritische Dämpfung → Schwingung
$D = 1$:	Kritische Dämpfung
$D > 1$: ω_d imaginär	Starke Dämpfung → Kriechen

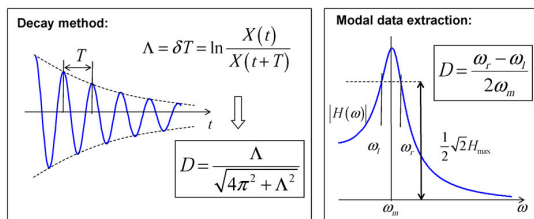
$$D \ll 1 \quad \text{Schwache Dämpfung} \rightarrow \omega_d \approx \omega_0$$

HAW/M+P, Ihlenburg, TSL Freie Schwingungen 2 8

Viskose Dämpfung

3. Experimentelle Bestimmung der Dämpfung

- Logarithmisches Dekrement (freie Schwingung)
- Modenbreite ($\sqrt{2}$ - Methode, erzwungene Schwingung)



HAW/M+P, Ihlenburg, TSL Freie Schwingungen 2 15

Viskose Dämpfung

Verlustfaktor

Die dimensionslose Größe

$$\eta = \frac{W_{\text{diss}}}{2\pi E_{\text{pot,max}}} \quad \text{Verlustfaktor}$$

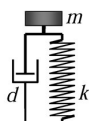
heißt Verlustfaktor (loss factor) der gedämpften Schwingung. Darin bezeichnet $U_{\max}$ den Maximalwert der potentiellen Energie während des Schwingungszyklus.

Für eine schwach ($D \ll 1$) viskos gedämpfte Schwingung mit Maximalausschlag x_0 gilt:

$$E_{\max} = \frac{1}{2} k A_0^2, \quad W_{\text{diss}} = \pi \omega_0 A_0^2 d \implies \eta = \frac{\omega_0 d}{k}$$

⇒ Viskose Dämpfung: Verlustfaktor = 2 mal Dämpfungsgrad

$$\eta = 2D$$



HAW/M+P, Ihlenburg, TSL Freie Schwingungen 2 22

Dämpfungsgrad und gedämpfte Eigenfrequenz

Die konjugiert komplexen Eigenwerte können geschrieben werden als

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i\omega_d$$

mit

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$$

und

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{d}{2m\omega_0}$$

„Gedämpfte Eigenfrequenz“

Dämpfungsgrad D

Damping constant ζ

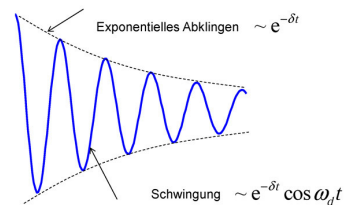
Die physikalische Lösung ist der Realteil der „mathematischen“ Lösung.

$$x(t) = \text{Re} [C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}] = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \varphi_0)$$

HAW/M+P, Ihlenburg, TSL Freie Schwingungen 2 7

Viskose Dämpfung

Gedämpfte Eigenschwingung (unterkritisch)



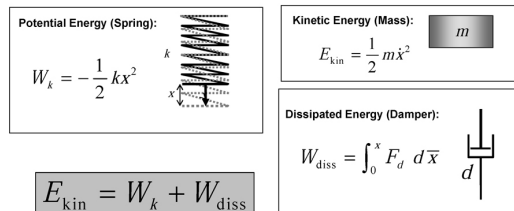
$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \varphi_0)$$

HAW/M+P, Ihlenburg, TSL Freie Schwingungen 2 9

Viskose Dämpfung

4. Arbeitssatz, Verlustfaktor, Hysterese

Da die Dämpfungskraft nicht konservativ ist, muss der Arbeitssatz angewendet werden.

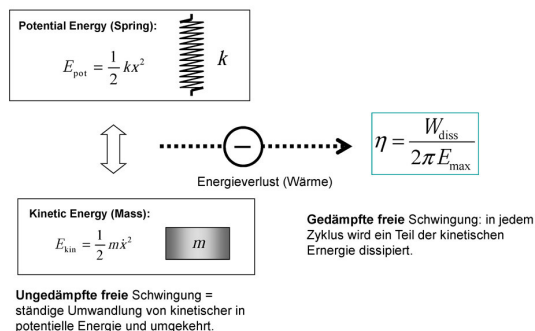


Bei gedämpften Schwingungen wird in jedem Zyklus ein Teil der kinetischen Energie dissipiert (in nichtmechanische Energie umgewandelt). Die kinetische Energie (Energie der Bewegung) nimmt daher in jedem Zyklus ab.

HAW/M+P, Ihlenburg, TSL Freie Schwingungen 2 17

Viskose Dämpfung

Energiebilanz der freien Schwingung



HAW/M+P, Ihlenburg, TSL Freie Schwingungen 2 23